第27卷 第5期　　工　程　数　学　学　报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0838-07

具有质体和抑制剂的非均匀恒化器模型的分歧*

谢文昊[1]，聂　华[2]，吴建华[2]

(1- 西安石油大学理学院，西安　710065；2- 陕西师范大学数学与信息科学学院，西安　710062)

摘　要: 本文讨论了一类具有外加抑制剂的质体负载与质体自由物种竞争的非均匀恒化器模型共存解的存在性和稳定性。通过比较原理、分歧理论和线性稳定性理论，分析了由半平凡解发出的分歧解的全局结构和局部稳定性，解释了物种共存的现象。结果表明抑制剂有利于遗传选择的物种避免被质体自由的物种所消亡。

关键词: 恒化器；质体负载；质体自由；共存解；全局分歧

分类号: **AMS**(2000) 35B40　　**中图分类号**: O175.26　　**文献标识码**: A

1　引言

近来，具有质体的恒化器竞争模型受到了广泛的关注[1-5]。本文研究如下具有质体和外加抑制剂的非均匀恒化器竞争模型

$$\begin{aligned}
&s_t = ds_{xx} - \tfrac{1}{r}auf_1(s) - \tfrac{1}{r}bvf_2(s)\mathrm{e}^{-\mu p}, && x\in(0,1), \quad t>0,\\
&u_t = du_{xx} + a(1-q)uf_1(s), && x\in(0,1), \quad t>0,\\
&v_t = dv_{xx} + bvf_2(s)\mathrm{e}^{-\mu p} + aquf_1(s), && x\in(0,1), \quad t>0,\\
&p_t = dp_{xx} - cuh(p), && x\in(0,1), \quad t>0,
\end{aligned} \tag{1}$$

具有边界条件

$$\begin{aligned}
&s_x(0,t) = -s^0, && s_x(1,t)+\gamma s(1,t)=0, \quad t>0,\\
&p_x(0,t) = -p^0, && p_x(1,t)+\gamma p(1,t)=0, \quad t>0,\\
&u_x(0,t) = u_x(1,t)+\gamma u(1,t)=0, && v_x(0,t)=v_x(1,t)+\gamma v(1,t)=0, \quad t>0
\end{aligned} \tag{2}$$

和非负的初始条件。这里 $s(x,t)$, $u(x,t)$, $v(x,t)$, $p(x,t)$ 分别为 t 时刻营养物、两竞争物种和抑制剂的浓度。$s^0, p^0>0$ 均为常数，分别为营养物和抑制剂的输入浓度。d 为恒化器的扩散率，r 为产出率。a, b 为两竞争物种的最大生长率，反应函数 $f_i(s)=s/(a_i+s)(i=1,2)$，其中 a_i 为半饱和常数，c 为物种 u 对抑制剂的吸收率，$h(p)=p/(h_1+p)$，其中 h_1 为半饱和常数。记质体游离的概率为 q，则 $0<q<1$。$\mathrm{e}^{-\mu p}$ 体现了抑制剂 p 对物种 v 生长率的抑制程度，其中 $\mu>0$ 为常数，反应了抑制剂对物种 v 的影响。

基于文献 [3,4] 的研究结果，许世壁等[2] 提出了一类具有质体和外加抑制剂的均匀搅拌的恒化器模型，得到了此模型的一些渐近行为。文献 [1] 改进了他们的结果，得到了模型存在唯一

收稿日期: 2008-11-10.　**作者简介**: 谢文昊 (1978年10月生)，女，硕士，讲师. 研究方向：偏微分方程数值解.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10971124)；陕西省自然科学基础研究计划 (2009JQ1007).

正平衡解的充要条件以及模型存在周期解的充分条件。文献 [6] 去掉均匀搅拌的假设，考虑了一类具有质体和内部抑制剂的非均匀恒化器模型，给出了当抑制剂的影响足够大时，PDE 系统的一些渐近性。本文考虑外加抑制剂的情形，即研究如下简化的椭圆系统

$$\begin{aligned} &du'' + a(1-q)uf_1(z-u-v) = 0, && u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0, \\ &dv'' + bvf_2(z-u-v)e^{-\mu p} + aquf_1(z-u-v) = 0, && v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0, \\ &dp'' - cuh(p) = 0, && p'(0) = -1, \quad p'(1) + \gamma p(1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

共存解的分支结构和稳定性，其中 $z(x) = \frac{1+\gamma}{\gamma} - x$。这里 (3) 是在 (1)-(2) 的平衡态系统中引入无量纲参数和变量，并使用恒化器模型所固有的守恒率而得到的，详细的推导见文献 [5-7]。

由于我们仅关心 (3) 的共存态 (即 (3) 的正解)，因此可将反应函数延拓为 C^1 连续的函数[5]。下面引入一些记号和一些已知的结论。设 λ_1, η_1 分别为如下特征值问题的主特征值

$$\begin{aligned} &d\varphi_1'' + \lambda_1 f_1(z)\varphi_1 = 0, \quad x \in (0,1), && \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1) + \gamma\varphi_1(1) = 0, \\ &d\psi_1'' + \eta_1 f_2(z)\mathrm{e}^{-\mu z}\psi_1 = 0, \quad x \in (0,1), && \psi_1'(0) = \psi_1'(1) + \gamma\psi_1(1) = 0, \end{aligned}$$

相应的正单位特征函数满足 $\max\limits_{[0,1]} \varphi_1 = 1$, $\max\limits_{[0,1]} \psi_1 = 1$。考虑如下退化的非线性边值问题

$$du'' + a(1-q)uf_1(z-u) = 0, \quad x \in (0,1), \qquad u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0, \tag{4}$$

$$dv'' + bvf_2(z-v)\mathrm{e}^{-\mu z} = 0, \quad x \in (0,1), \qquad v'(0) = v'(1) + \gamma v(1) = 0. \tag{5}$$

显然，若 $a \le \lambda_1/(1-q)$，则 $u = 0$ 为 (4) 的唯一非负解；若 $a > \lambda_1/(1-q)$，则 (4) 存在唯一正解，记为 $\vartheta(a)$，且 $0 < \vartheta(a) < z$ (参见文献 [7])。而且

$$\lim_{a \to \lambda_1/(1-q)} \vartheta(a) = 0$$

在 [0,1] 上一致成立。类似地，若 $b \le \eta_1$，则 $v = 0$ 为 (5) 的唯一非负解；若 $b > \eta_1$，则 (5) 存在唯一正解 θ，且 $0 < \theta < z$。

本文主要研究系统 (3) 共存态的全局结构和稳定性。由于 $0 < q < 1$，即质体可能游离，使具有质体 (plasmid-bearing) 的物种转化为不具有质体 (plasmid-free) 的物种，这就破坏了标准的恒化器模型所具有的严格竞争性，因此单调系统理论在这里失效。但借助于一些重要的特征值估计和比较原理，仍然可以证明 $b > \eta_1$ 和 $b < \eta_1$ 时 (3) 均存在共存解。

2　共存解的存在性与稳定性

本节主要讨论系统 (3) 共存态的全局结构和稳定性。为此，首先讨论 (3) 正解的先验估计。

引理 2.1　如下边值问题存在唯一正解 p_a，且 $0 < p_a < z$。

$$dp'' - c\vartheta(a)h(p) = 0, \quad x \in (0,1), \qquad p'(0) = -1, \quad p'(1) + \gamma p(1) = 0. \tag{6}$$

证明　设 $p(x)$ 为 (6) 的非负解，则可以证明 $0 < p(x) < z(x)$。实际上，由最大值原理有 $p(x) > 0 (x \in [0,1])$。令 $q = z(x) - p$，则 q 满足

$$-dq'' = c\vartheta(a)h(p) > 0, \quad q'(0) = q'(1) + \gamma q(1) = 0.$$

根据最大值原理可知 $q(x) > 0\,(x \in [0,1])$，即 $0 < p(x) < z(x)$。另一方面，$z(x), 0$ 分别为 (6) 的上下解。因此 (6) 存在正解 $p(x)$，且 $0 < p < z$。下面证明 (6) 在 $(0, z(x))$ 内只有一个正解。令 $0 < p_1(x)$, $p_2(x) < z$ 为 (6) 的两个正解，则 $q = p_1 - p_2$ 满足

$$-dq'' + \frac{ch_1\vartheta(a)}{(h_1+p_1)(h_1+p_2)}q = 0, \quad x \in (0,1), \quad q'(0) = q'(1) + \gamma q(1) = 0.$$

再由最大值原理有 $q \equiv 0$，即唯一性成立。

下面给出 (3) 正解的先验估计，其证明参见文献 [7] 的引理4.1和引理4.2。

引理2.2 设 (u,v,p) 为 (3) 的非负解且满足 $u \not\equiv 0$, $v \not\equiv 0$，则

(i) $a > \lambda_1/(1-q)$； (ii) $0 < u < \vartheta(a)$, $0 < v < z$, $p_a < p < z$； (iii) $0 < u+v < z$。

引理2.3[5] 设 $b > \eta_1$，则

$$L_b = d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b\left(f_2(z-\theta) - \theta f_2'(z-\theta)\right)\mathrm{e}^{-\mu z}$$

的所有特征值都是负的。

下面采用分歧理论研究 (3) 正解的结构。设

$$C_B^1\big([0,1]\big) = \big\{u \in C^1\big([0,1]\big) : u'(0) = u'(1) + \gamma u(1) = 0\big\}$$

具有通常的 C^1 范数 $\|\cdot\|$, $X = C_B^1([0,1]) \times C_B^1([0,1]) \times C_B^1([0,1])$。首先考虑 $b > \sigma_1$ 的情形，于是系统 (3) 存在平凡的非负解 $(0,0,z)$ 和半平凡的非负解 $(0,\theta,z)$。取 a 为分歧参数，从半平凡的非负解分支 $\{(a,0,\theta,z) : a \in \mathbf{R}^+\}$ 出发构造 (3) 的正解。令 $\omega = u$, $\chi = \theta - v$, $\xi = z - p$，K 为 $-d\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $C_B^1([0,1])$ 中的逆算子。设 $F = (F_1, F_2, F_3)$，其中

$$\begin{aligned}
F_1(\omega,\chi,\xi) &= a(1-q)\omega\big(f_1(z-\theta-\omega+\chi) - f_1(z-\theta)\big),\\
F_2(\omega,\chi,\xi) &= b(\chi-\theta)f_2(z-\theta-\omega+\chi)\mathrm{e}^{-\mu(z-\xi)} - b(\chi-\theta)f_2(z-\theta)\mathrm{e}^{-\mu z}\\
&\quad + b\theta f_2'(z-\theta)\mathrm{e}^{-\mu z}(\chi-\omega) + aq\omega\big(f_1(z-\theta-\omega+\chi) - f_1(z-\theta)\big)\\
&\quad + \mu b\theta f_2(z-\theta)\mathrm{e}^{-\mu z}\xi,\\
F_3(\omega,\chi,\xi) &= c\omega\big(h(z-\xi) - h(z)\big),
\end{aligned}$$

则 F 连续，$F(0,0,0) = 0$，且 Fréchet 导数 $D_{(\omega,\chi,\xi)}F(0,0,0) = 0$。分别定义 T, G 为

$$T(a,\omega,\chi,\xi) = \left(\begin{array}{l}
a(1-q)K\big(\omega f_1(z-\theta)\big) + KF_1(\omega,\chi,\xi),\\
bK\big(\chi(f_2(z-\theta) - \theta f_2'(z-\theta))\mathrm{e}^{-\mu z}\big) + K\big[(b\theta f_2'(z-\theta)\mathrm{e}^{-\mu z}\\
\quad - aqf_1(z-\theta))\omega\big] - \mu bK\big(\theta f_2(z-\theta)\mathrm{e}^{-\mu z}\xi\big) + KF_2(\omega,\chi,\xi),\\
cK\big(h(z)\omega\big) + KF_3(\omega,\chi,\xi)
\end{array}\right),$$

$$G(a,\omega,\chi,\xi) = (\omega,\chi,\xi) - T(a,\omega,\chi,\xi),$$

则 $T(a,\omega,\chi,\xi)$ 为 X 上的连续可微紧算子，G 是 C^1 连续的，$G(a,0,0,0) = 0$。而且 $G(a,\omega,\chi,\xi) = 0$ 满足 $0 < \omega < \vartheta(a)$, $0 < \theta - \chi < z$, $0 < z - \xi < z$ 的解恰好为 (3) 的正解。

考虑在点 $(a,\omega,\chi,\xi)=(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0)$ 的分歧，其中 $\hat{\lambda}_1$ 为如下边值问题的主特征值

$$d\hat{\varphi}_1^{''}+\hat{\lambda}_1 f_1(z-\theta)\hat{\varphi}_1=0,\quad x\in(0,1),\quad \hat{\varphi}_1'(0)=\hat{\varphi}_1'(1)+\gamma\hat{\varphi}_1(1)=0,$$

相应的主特征函数 $\hat{\varphi}_1>0\,(x\in[0,1])$，且 $\max\limits_{[0,1]}\hat{\varphi}_1=1$。设 $L(a,0,0,0)=D_{(\omega,\chi,\xi)}G(a,0,0,0)$ 为 G 关于 (ω,χ,ξ) 在 $(a,0,0,0)$ 的 Fréchet 导数，则易验证核空间

$$N\Big(L\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0\Big)\Big)=\mathrm{span}\big\{(\hat{\varphi}_1,\chi_1,\xi_1)\big\},$$

值域

$$R\Big(L\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0\Big)\Big)=\Big\{(u,v,p)\in X:\int_0^1 u\hat{\varphi}_1\mathrm{d}x=0\Big\},$$

而且

$$\begin{aligned}L_1\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0\Big)(\hat{\varphi}_1,\chi_1,\xi_1)&=D^2_{a(\omega,\chi,\xi)}G\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0\Big)(\hat{\varphi}_1,\chi_1,\xi_1)\\&=\Big(-(1-q)K\big(\hat{\varphi}_1 f_1(z-\theta)\big),\,qK\big(\hat{\varphi}_1 f_1(z-\theta)\big),0\Big)\\&=\Big(-\hat{\lambda}_1^{-1}(1-q)\hat{\varphi}_1,\,\hat{\lambda}_1^{-1}q\hat{\varphi}_1,\,0\Big)\notin R\Big(L\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,0,0\Big)\Big),\end{aligned}$$

其中

$$\xi_1=K\big(ch(z)\hat{\varphi}_1\big)>0,$$

$$\chi_1=L_b^{-1}\Big(\frac{\hat{\lambda}_1 q}{1-q}f_1(z-\theta)\hat{\varphi}_1\Big)+\tilde{L}_b^{-1}\big[b\theta\big(-f_2'(z-\theta)\hat{\varphi}_1+\mu f_2(z-\theta)\xi_1\big)\mathrm{e}^{-\mu z}\big].$$

由文献 [8] 的定理 13.5 可知，发自 $(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z)$ 的 (3) 的正解分支为光滑曲线

$$\Gamma_1=\Big\{\big(a(s),\,s(\hat{\varphi}_1+\phi(s)),\,\theta-s(\chi_1+\psi(s)),\,z-s(\xi_1+Q(s))\big):s\in(0,\delta)\Big\},$$

且

$$a(0)=\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},\quad \phi(0)=\psi(0)=Q(0)=0,\quad \big(\phi(s),\,\psi(s),\,Q(s)\big)\in\big\{(\hat{\varphi}_1,\chi_1,\xi_1)\big\}^{\perp}.$$

进一步，类似于文献 [5,7] 可以证明 $a(s)$ 关于 s 在 $s=0$ 点的导数为

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0}=\frac{\hat{\lambda}_1\int_0^1\hat{\varphi}_1^2 f_1'(z-\theta)(\hat{\varphi}_1-\chi_1)\mathrm{d}x}{(1-q)\int_0^1\hat{\varphi}_1^2 f_1(z-\theta)\mathrm{d}x}.\tag{7}$$

下面证明 Γ_1 可延拓为全局分支 Γ。设 $a_i(\lambda)$ 为如下问题的特征值

$$\lambda d\phi^{''}+a_i(\lambda)f_1(z-\theta)\phi=0,\quad x\in(0,1),\quad \phi'(0)=\phi'(1)+\gamma\phi(1)=0,$$

则 $a_i(\lambda)$ 在 $(1,+\infty)$ 内关于 λ 严格递增，且有 $0<a_1(\lambda)<a_2(\lambda)\le a_3(\lambda)\le\cdots\to\infty$，$a_1(1)=\hat{\lambda}_1$。根据基本的全局分歧理论[5,7] 可以证明当 $a<\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}$ 时，$i(T(a,\cdot),0)=1$；当

$$\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}<a<\frac{a_2(1)}{1-q}$$

时，$i(T(a,\cdot),0)=-1$。由文献[7]的全局分歧定理2.1可知，在$R\times X$内存在发自$(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z)$的连续分支$\Gamma$满足以下三种情形之一：

(i) Γ连接了点$(\tilde{a},0,\theta,z)$，其中$\tilde{a}\neq\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}$；

(ii) Γ在$\mathbf{R}^+\times X$内由$(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z)$延伸到无穷；

(iii) Γ包含形如$(a,u,\theta-v,z-p)$和$(a,-u,\theta+v,z+p)$的点，其中$(u,v,p)\not\equiv(0,0,0)$。

引理2.4 $\Gamma-\{(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z)\}$由$(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z)$出发在正锥$P$内延伸到无穷，其中

$$P=\big\{(a,u,v,p)\in R^+\times X: u>0,\ v>0,\ p>0,\ x\in[0,1]\big\}.$$

证明 假设

$$\Gamma-\Big\{\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z\Big)\Big\}\not\subseteq P,$$

则存在

$$(\tilde{a},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{p})\Big(\Gamma-\Big\{\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q},0,\theta,z\Big)\Big\}\Big)\cap\partial P$$

和序列$\{(\tilde{a}_n,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n,\tilde{p}_n)\}\subset\Gamma\cap P$使得当$n\to\infty$时，$(\tilde{a}_n,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n,\tilde{p}_n)\to(\tilde{a},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{p})$。首先由最大值原理可知$\tilde{p}>0$。因此$(\tilde{a},\tilde{u},\tilde{v},\tilde{p})\in\partial P$表明存在$x_0\in[0,1]$，使得$\tilde{u}\geq 0$, $\tilde{u}(x_0)=0$，或者存在$x_0\in[0,1]$，使得$\tilde{v}\geq 0$, $\tilde{v}(x_0)=0$。再根据最大值原理有$\tilde{u}\equiv 0$或者$\tilde{v}\equiv 0$。显然，$\tilde{v}\equiv 0$, $\tilde{u}>0$不成立。

假设$(\tilde{u},\tilde{v})\equiv(0,0)$，则当$n\to\infty$时，$(\tilde{a}_n,\tilde{u}_n,\tilde{v}_n,\tilde{p}_n)\to(\tilde{a},0,0,z)$。而且$\tilde{U}_n=\tilde{u}_n/\|\tilde{u}_n\|$，满足

$$d\tilde{U}_n''+\tilde{a}_n(1-q)\tilde{U}_nf_1(z-\tilde{u}_n-\tilde{v}_n)=0,\quad x\in(0,1),\quad \tilde{U}_n'(0)=\tilde{U}_n'(1)+\gamma\tilde{U}_n(1)=0.$$

由L^p估计和Sobolev嵌入定理可知，存在$u\in C_B^1([0,1])$满足$u\geq 0$, $u\not\equiv 0$，且

$$du''+\tilde{a}(1-q)uf_1(z)=0,\quad x\in(0,1),\quad u'(0)=u'(1)+\gamma u(1)=0.$$

根据最大值原理有$u>0\,(x\in[0,1])$，这表明$\tilde{a}=\lambda_1/(1-q)$。于是

$$\tilde{a}_n\to\lambda_1/(1-q)(n\to\infty),\quad \lim_{n\to\infty}\vartheta(\tilde{a}_n)=0,$$

其中$\vartheta(\tilde{a}_n)$为$a=\tilde{a}_n$时(4)的唯一正解。

由引理2.2可知

$$d\tilde{v}_n''+b\tilde{v}_nf_2(z-\tilde{u}_n-\tilde{v}_n)\mathrm{e}^{-\mu\tilde{p}_n}+\tilde{a}_nq\tilde{u}_nf_1(z-\tilde{u}_n-\tilde{v}_n)>d\tilde{v}_n''+b\tilde{v}_nf_2\big(z-\vartheta(\tilde{a}_n)-\tilde{v}_n\big)\mathrm{e}^{-\mu z}.$$

因此，如果$b>\lambda_1(f_2(z-\vartheta(\tilde{a}_n))\mathrm{e}^{-\mu z})$，则$\tilde{v}_n>\tilde{\omega}_n>0$，其中$\tilde{\omega}_n$为

$$d\tilde{\omega}_n''+b\tilde{\omega}_nf_2(z-\vartheta(\tilde{a}_n)-\tilde{\omega}_n)\mathrm{e}^{-\mu z}=0,\quad x\in(0,1),\quad \tilde{\omega}_n'(0)=\tilde{\omega}_n'(1)+\gamma\tilde{\omega}_n(1)=0$$

的唯一正解。实际上$\lambda_1\big(f_2(z-\vartheta(\tilde{a}_n))\mathrm{e}^{-\mu z}\big)\to\eta_1(n\to\infty)$。又$b>\eta_1$，因此存在$N>0$，使得当$n\geq N$时$b>\lambda_1(f_2(z-\vartheta(\tilde{a}_n))\mathrm{e}^{-\mu z})$。于是当$n\geq N$时$\tilde{v}_n>\tilde{\omega}_n>0$。又$\tilde{v}_n\to 0(n\to\infty)$，因此$\tilde{\omega}_n\to 0\,(n\to\infty)$。令$\tilde{W}_n=\tilde{\omega}_n/\|\tilde{\omega}_n\|$，则$\tilde{W}_n$满足

$$d\tilde{W}_n''+b\tilde{W}_nf_2\big(z-\vartheta(\tilde{a}_n)-\tilde{\omega}_n\big)\mathrm{e}^{-\mu z}=0,\quad x\in(0,1),\quad \tilde{W}_n'(0)=\tilde{W}_n'(1)+\gamma\tilde{W}_n(1)=0.$$

根据L^p估计和Sobolev嵌入定理，存在$\omega \ge 0$, $\omega \ne 0$，使得在$C_B^1([0,1])$内$\tilde{W}_n \to \omega (n \to \infty)$，且

$$d\omega'' + b\omega f_2(z)\mathrm{e}^{-\mu z} = 0, \quad x \in (0,1), \quad \omega'(0) = \omega'(1) + \gamma\omega(1) = 0.$$

而且，由最大值原理可知$\omega > 0\,(x \in [0,1])$，这表明$b = \eta_1$，与$b > \eta_1$矛盾。

假设$\tilde{u} \equiv 0$, $\tilde{v} > 0$，则$\tilde{v} = \theta$, $\tilde{p} = z$。即$(\tilde{a}_n, \tilde{u}_n, \tilde{v}_n, \tilde{p}_n) \to (\tilde{a}, 0, \theta, z)\,(n \to \infty)$。令$\tilde{U}_n = \tilde{u}_n/\|\tilde{u}_n\|$，则$\tilde{U}_n$满足

$$d\tilde{U}_n'' + \tilde{a}_n(1-q)\tilde{U}_n f_1(z - \tilde{u}_n - \tilde{v}_n) = 0, \quad x \in (0,1), \quad \tilde{U}_n'(0) = \tilde{U}_n'(1) + \gamma\tilde{U}_n(1) = 0.$$

同理可证$\tilde{a} = \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}$，矛盾。

于是$\Gamma - \{(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}, 0, \theta, z)\} \subset P$，$\Gamma$必在$P$内延伸到无穷。而且如果$(u,v,p) \in \Gamma - \{(\tilde{a}_0, 0, \theta, z)\}$，由引理2.2，$L^p$估计和Sobolev嵌入定理，则存在$M > 0$使得$\|u\|, \|v\|, \|p\| < M$。因此，在正锥$P$内$\Gamma$必沿$a$延伸到无穷。

综上，我们有如下全局分歧的结论。

定理2.1　设$b > \eta_1$，则存在发自$(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}, 0, \theta, z)$的(3)正解的连续分支$\Gamma$，它在正锥$P$内沿$a$延伸到无穷，且$\Gamma_1 \subset \Gamma$。

下面研究分歧点$(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}, 0, \theta, z)$附近共存解的稳定性。令$X_1 = [C^{2,\alpha}([0,1])]^3 \cap X$, $Y = [C^{\alpha}([0,1])]^3$, $i: X_1 \to Y$为包含映射。类似于文献[7]的引理5.2易知，0为$L(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}, 0, 0, 0)$的$i$-简单特征值，且$L(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}, 0, 0, 0)$的所有其它特征值都位于左半复平面。

设$L(a, 0, \theta, z)$和$L(a(s), u(s), v(s), p(s))$分别为(3)在点$(a, 0, \theta, z)$和$(a(s), u(s), v(s), p(s))$处的线性化算子。根据文献[8]的引理13.7和引理13.8可知，存在分别定义在$\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}$和0邻域上的$C^1$连续函数$a \to (\pi(a), \Phi(a)) \in R \times X_1$和$s \to (\tau(s), \Psi(s)) \in R \times X_1$，使得

$$\Big(\pi\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}\Big), \Phi\Big(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}\Big)\Big) = \big(0, \hat{\varphi}_1, \chi_1, \xi_1\big) = \big(\tau(0), \Psi(0)\big),$$

且

$$\begin{aligned} &L(a, 0, \theta, z)\Phi(a) = \pi(a)\Phi(a), && \big|a - \tfrac{\hat{\lambda}_1}{1-q}\big| \ll 1, \\ &L\big(a(s), u(s), v(s), p(s)\big)\Psi(s) = \tau(s)\Psi(s), && |s| \ll 1, \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\Phi(a) = \big(\Phi_1(a), \Phi_2(a), \Phi_3(a)\big), \quad \Psi(s) = \big(\Psi_1(s), \Psi_2(s), \Psi_3(s)\big).$$

而且$\dot{\pi}(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}) \ne 0$，又若$\tau(s) \ne 0\,(|s| \ll 1)$，则当$|s| \ll 1$时$\tau(s)$和$-s\dot{a}(s)\dot{\pi}(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q})$同号，其中$\dot{\pi}(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q})$为$\pi(a)$关于$a$在$a = \frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}$处的导数，$\dot{a}(s)$为$a(s)$关于$s$的导数。进一步，类似于文献[5]的引理3.7可以证明$\dot{\pi}(\frac{\hat{\lambda}_1}{1-q}) > 0$。再结合等式(7)，有如下稳定性定理。

定理2.2　令

$$I = \int_0^1 \hat{\varphi}_1^2 f_1'(z-\theta)(\hat{\varphi}_1 - \chi_1)\mathrm{d}x.$$

若$I > 0$，则$\tau(s) < 0\,(0 < s \ll 1)$，因而定理2.1所给出的分歧解稳定。

注2.1　当μ充分大时，可以证明θ和$L_b^{-1}[b\theta(-f_2'(z-\theta)\hat{\varphi}_1 + \mu f_2(z-\theta)\xi_1)\mathrm{e}^{-\mu z}]$均趋于零，且存在$\delta > 0$使得

$$L_b^{-1}\Big(\frac{\hat{\lambda}_1 q}{1-q} f_1(z-\theta)\hat{\varphi}_1\Big) < -\delta.$$

又因为$\xi_1 = K(ch(z)\hat{\varphi}_1) > 0$，因此只要$\mu$充分大，就有$\chi_1 < 0$，从而有$I > 0$，且由定理2.1给出的分歧解在$0 < s \ll 1$时稳定。从生态学上看，参数$\mu$体现了抑制剂的影响。因此这一结果正好表明抑制剂有利于遗传选择的物种避免被不具有质体的物种所消亡。

对于$b < \eta_1$的情形，同理有如下结论。

定理2.3 设$b < \eta_1$，则(3)存在发自$(\frac{\lambda_1}{1-q},0,0,z)$的正全局分支$\Gamma'$，它在$P$内沿$a$延伸到无穷。而且，在分歧点$(\frac{\lambda_1}{1-q},0,0,z)$附近，正解稳定，且

$$\{a:(a,u,v,p)\in\Gamma'\} = \Big(\frac{\lambda_1}{1-q}, +\infty\Big).$$

注2.2 定理2.3表明如果$b < \eta_1$固定，则$a \in (\frac{\lambda_1}{1-q},\infty)$时(3)存在共存解。

参考文献：

[1] Ai S B. Periodic solutions in a model of competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in a chemostat with an inhibitor[J]. J Math Biol, 2001, 42: 71-94

[2] Hsu S B, Luo T K, Waltman P. Competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in a chemostat with an inhibitor[J]. J Math Biol, 1995, 34: 225-238

[3] Stephanopoulos G, Lapidus G. Chemostat dynamics of plasmid-bearing plasmid-free mixed recombinant cultures[J]. Chem Eng Sci, 1988, 43: 49-57

[4] Lenski R E, Hattingh S. Coexistence of two competitors on one resource and one inhibitor: a chemostat model based on bacteria and antibiotics[J]. J Theoret Biol, 1986, 122: 83-93

[5] Nie H, Wu J H. A system of reaction-diffusion equations in the unstirred chemostat with an inhibitor[J]. International J Bifurcation and Chaos, 2006, 16(4): 989-1009

[6] Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. The effect of inhibitor on the plasmid-bearing and plasmid-free model in the unstirred chemostat[J]. SIAM J Math Anal, 2007, 38(6): 1860-1885

[7] Wu J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat[J]. Nonlinear Anal, 2000, 39: 817-835

[8] Smoller J. Shock Waves and Reaction-diffusion Equations[M]. New York: Spring-Verlag, 1983

Bifurcation on the Plasmid-bearing and Plasmid-free Model in the Unstirred Chemostat with Inhibitor

XIE Wen-hao[1], NIE Hua[2], WU Jian-hua[2]

(1- School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065;
2- College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062)

Abstract: The existence and stability of coexistence solutions to a competition model between plasmid-bearing and plasmid-free organism in the unstirred chemostat with an external inhibitor are discussed. By the comparison principle, bifurcation theory and linear stability method, the global structure of the bifurcation solution from semitrivial solution and their local stability are analyzed, which explain the phenomenon of coexistence. The results indicate that the inhibitor can help the genetically altered (plasmid-bearing) organism to avoid 'capture' of the process by the plasmid-free organism.

Keywords: chemostat; plasmid-bearing; plasmid-free; coexistence solutions; global bifurcation

Received: 10 Nov 2008. **Accepted:** 26 Feb 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971124); the Natural Science Foundation of Shaanxi Province (2009JQ1007).